DAS PENTAEDER

DER

FLÄCHEN DRITTER ORDNUNG

BEIM

AUFTRETEN VON SINGULARITÄTEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

AN DER

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

VON

CARL RODENBERG.

GÖTTINGEN

DRUCK DER UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI VON E. A. HUTH

1874.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544702_0048

In Folgendem soll untersucht werden, wie sich das Sylvester'sche Pentaeder einer Fläche dritter Ordnung verhält, wenn letztere einen oder mehrere Knotenpunkte erhält. Die verschiedenen Arten von Knotenpunkten, welche hinsichtlich des Verhaltens des Tangentialkegels auftreten können, sind von Schläfli[1]) aufgezählt.

Die Hauptgrundlagen für unsere Untersuchungen sind 2 Abhandlungen von Clebsch[2]) und Gordan[3]), in welchen für Flächen ohne singuläre Punkte des Pentaeder behandelt ist. Dort wird nachgewiesen, dass die Gleichung einer solchen in der Form

$$\alpha_1 . E_1^3 + \alpha_2 . E_2^3 + \alpha_3 . E_3^3 + \alpha_4 . E_4^3 + \alpha_5 . E_5^3 = 0$$

geschrieben werden kann, wo

$$E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0, \quad E_4 = 0, \quad E_5 = 0$$

die Gleichungen der Ebenen des Pentaeders und die in ihnen enthaltenen Constanten so gewählt sind, dass identisch

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = 0,$$

was immer möglich ist, wenn nicht vier der Ebenen durch einen Punkt gehen.

Um zunächst die dort nachgewiesenen geometrischen Beziehungen zwischen dem Pentaeder und der gegebenen Fläche auseinanderzusetzen, sei $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ oder kürzer $f = 0$ die Gleichung der letztern. Sind ferner die Differentialquotienten

---

1) On the Distribution of Surfaces of the third order into Species, in reference to the absence or presence of Singular Points. Phylosophical Transactions. London 1863, pag. 207 ff.

2) Ueber die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche. Crelles Journal Band 59 pag. 193.

3) Das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung. Mathematische Annalen Band 5 Heft 2.

$\frac{df}{dx_i}$ und $\frac{d^2f}{dx_i\,dx_k}$ bezeichnet durch f_i und f_{ik}, so ist die Gleichung der ersten Polare eines Punkts y:

$$y_1\ f_1 + y_2\ f_2 + y_3\ f_3 + y_4\ f_4 = 0.$$

Diese ist eine Fläche 2ter Ordnung und die Bedingung, dass dieselbe einen Knotenpunkt hat, d. h. ein Kegel ist, wird ausgedrückt durch das Bestehen der vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
y_1 f_{11} + y_2\ f_{12} + y_3\ f_{13} + y_4\ f_{14} &= 0\\
y_1 f_{21} + y_2\ f_{22} + y_3\ f_{23} + y_4\ f_{24} &= 0\\
y_1 f_{31} + y_2\ f_{32} + y_3\ f_{33} + y_4\ f_{34} &= 0\\
y_1 f_{41} + y_2\ f_{42} + y_3\ f_{43} + y_4\ f_{44} &= 0
\end{aligned}$$

für die Coordinaten dieses Punkts. Durch Elimination der y aus diesen Gleichungen erhält man die Gleichung des Orts sämmtlicher Knotenpunkte von Polaren, aber des symmetrischen Auftretens der y und x wegen liegen auch sämmtliche Pole auf jener Fläche, *betrachtet man daher einen ihrer Punkte a als Pol einer Polare mit dem Knotenpunkte b, so ist umgekehrt auch b Pol einer Polare mit dem Knotenpunkte a.*

Die angedeutete Elimination führt auf die Gleichung

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34}\\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Die hierdurch dargestellte Fläche ist von der vierten Ordnung und heisst *Hessesche Fläche* der gegebenen. *Die* 10 *Ecken und Kanten des Pentaeders sind Knotenpunkte und Grade dieser Fläche. Für jede Ecke verschwinden sämmtliche* 10 *Unterdeterminanten; H_{ik} und ihre Polare ist daher ein Ebenenpaar. Die Schnittlinie dieses Ebenvnpaars ist eine Pentaederkante und heisst der Ecke conjugiert. Gehen drei Pentaederebenen durch eine fixierte Ecke, so bestimmen die beiden übrigen die ihr conjugierte Kante und sind harmonisch zu dem Ebenenpaar der Polare. Auf jeder Kante liegen drei Ecken, deren conjugierte Grade durch diejenige Ecke gehen, welche der betrachteten Kante conjugiert ist.*

Für eine Pentaederecke erhält man also nicht mehr *einen* Knotenpunkt der zugehörigen Polare, sondern unendlich viele,

nämlich die ihm conjugierte Grade. Umgekehrt haben sämmtliche Punkte dieser Graden Polaren, deren Knotenpunkte in jener Ecke liegen, nur den drei Ecken auf ihr entsprechen, wiederum unendlich viele Punkte, nämlich die drei Kanten durch die conjugierte Ecke.

§. 1.

Veränderungen der Hesseschen Fläche durch Auftreten von Knotenpunkten. Die Fläche dritter Ordnung mit einem conischen Knotenpunkte.

Hat die gegebene Fläche einen Knotenpunkt, so besitzt die Hessesche Fläche an derselben Stelle auch einen und es fragt sich daher ob dieser eine Pentaederecke ist; d. h. ob alle Unterdeterminanten für ihn verschwinden. Wählt man den Knotenpunkt zur Ecke $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ des Coordinatentetraeders, so nimmt die Gleichung der Fläche die Form

$$x_4 . \varphi(x_1, x_2, x_3) + \psi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

an, in der φ und ψ resp. vom zweiten und dritten Grade sind. Weiter ist dann

$$H = \begin{vmatrix} x_4\,\varphi_{11}+\psi_{11} & x_4\,\varphi_{12}+\psi_{12} & x_4\,\varphi_{13}+\psi_{13} & \varphi_1 \\ x_4\,\varphi_{21}+\psi_{21} & x_4\,\varphi_{22}+\psi_{22} & x_4\,\varphi_{23}+\psi_{23} & \varphi_2 \\ x_4\,\varphi_{31}+\psi_{31} & x_4\,\varphi_{32}+\psi_{32} & x_4\,\varphi_{33}+\psi_{33} & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Für den Knotenpunkt verschwinden sämmtliche Unterdeterminanten mit Ausnahme von

$$H_{44} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} x_4^3$$

Die Grössen φ_{ik} sind Constanten, nämlich die Coefficienten des Tangentenkegels $\varphi = 0$ im Knotenpunkte, und ein Verschwinden von H_{44} tritt dann ein, wenn entweder alle Coefficienten Null sind, d. h. die gegebene Fläche ein Kegel ist, oder der Tangentenkegel in ein Ebenenpaar ausartet. Im ersten Falle wird jedoch H identisch Null, was vorauszusehen war, da die Polare jedes Kegels ebenfalls ein Kegel ist. Mit Ausschluss dieses Falles haben wir also den Satz: *Soll der Knotenpunkt einer Fläche dritten Grades Pentaederecke sein,*

so ist dieses nur möglich, wenn er ein biplanarer resp. uniplanarer ist. Jeder conische Knotenpunkt bewirkt das Auftreten eines weiteren auf der Hesseschen Fläche, für eine Fläche dritter Ordnung mit 4 solchen Punkten enthält z. B. jene Fläche 14.

Es wird sich zeigen, dass ein eigentliches Pentaeder nur dann noch existiert, wenn allein conische Knotenpunkte vorhanden sind, während beim Auftreten solcher mit uneigentlichen Tangentenkegeln zwei oder mehr Ebenen vereinigt liegen, oder in gewisser Weise unbestimmt sind. Bei den Gleichungen letzterer Flächen lässt sich auch die Reduction auf 5 Cuben nicht mehr ausführen.

Ist nun eine Fläche dritter Ordnung durch die Gleichung

$$f = \alpha_1 E_1^3 + \alpha_2 E_2^3 + \alpha_3 E_3^3 + \alpha_4 E_4^3 + \alpha_5 E_5^3 = 0$$

gegeben, so hat dieselbe einen Knotenpunkt $y_1 y_2 y_3 y_4$, wenn für diesen die folgenden Gleichungen bestehen:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0,\ f_4 = 0.$$

Aus diesen und $f = 0$ lassen sich die α eliminieren und man erhält als Gleichung der Fläche:

$$\begin{vmatrix} E_1^3 & E_2^3 & E_3^3 & E_4^3 & E_5^3 \\ \overline{E_{1y}^2} & \overline{E_{2y}^2} & \overline{E_{3y}^2} & \overline{E_{4y}^2} & \overline{E_{5y}^2} \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_{45} \end{vmatrix} = 0.$$

wenn

$$E_i = u_{1,i} x_1 + u_{2,i} x_2 + u_{3,i} x_3 + u_{4,i} x_4$$
$$E_{iy} = u_{1,i} y_1 + u_{1,i} y_2 + u_{3,i} y_3 + u_{4,i} y_4$$

Die Unterdeterminanten, gebildet nach den Elementen der ersten Horizontalreihe, können nie Null sein, da ein Verschwinden einer derselben andeutet, dass 4 Pentaederebenen durch einen Punkt gehen, welcher Fall von vornherein ausgeschlossen ist. Die Coefficienten der fünf Cuben sind also immer endlich, so lange der Knotenpunkt nicht in einer Pentaederebene liegt. Die abgeleitete Gleichung wird noch bedeutend einfacher, wenn man die Identität $\Sigma E_i = 0$ berücksichtigt. Sie geht dann über in

$$\frac{E_1{}^3}{E_{1y}{}^2}+\frac{E_2{}^3}{E_{2y}{}^2}+\frac{E_3{}^3}{E_{3y}{}^2}+\frac{E_4{}^3}{E_{4y}{}^2}+\frac{E_5{}^3}{E_{5y}{}^2}.$$

Man hat demnach das folgende Resultat:

Hat eine Fläche dritter Ordnung einen conischen Knotenpunkt, so ist die Reduction ihrer Gleichung auf ein Aggregat von 5 Cuben möglich und zwar sind die Coefficienten der letztern die reciproken Werthe der Quadrate fünf linearer Ausdrücke, welche man durch Einführung der Coordinaten des Knotenpunkts in die Gleichungen der Pentaederebenen erhält.

§. 2.

Die Fläche dritter Ordnung und achter Classe mit 2 conischen Knotenpunkten.

Nimmt man diese zu

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ und } x_1 = x_2 = x_4 = 0,$$

ferner die feste Tangentenebene an ihrer Verbindungslinie (solche Linien werden wir in Zukunft einfach durch Knotengrade bezeichnen) zu $x_1 = 0$, so nimmt nach Schläfli die Gleichung der Fläche die Form

$$6x_1x_3x_4+3x_2{}^2(x_3+x_4)+ax_1{}^3+3bx_1{}^2x_2+3cx_1x_2{}^2=0$$

an, dann ist

$$H=\begin{vmatrix} ax_1+bx_2 & bx_1+cx_2 & x_4 & x_4 \\ bx_1+cx_2 & cx_1+x_3+x_4 & x_2 & x_2 \\ x_4 & x_2 & 0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Als eine Pentaederecke findet sich

$$x_1 = x_2 = x_3 + x_4 = 0.$$

Ihre conjugierte Grade erhalten wir als Schnittlinie der Ebenen ihrer zerfallenden Polare. Für einen beliebenden Punkt wird die Gleichung dieser Fläche:

$$y_1(2x_3x_4+ax_1{}^2+2bx_1x_2+cx_2{}^2)+y_2(2x_2[x_3+x_4]+bx_1{}^2+2cx_1x_2)$$
$$+y_3(2x_1x_4+x_2{}^2)+y_4(2x_1x_3+x_2{}^2)=0.$$

Mithin für die gefundene Ecke:

$$x_1(x_3-x_4)=0.$$

Für die conjugierte Grade ($x_1 = x_3 - x_4 = 0$) verschwinden die Unterdeterminanten bis auf

$$H_{33} = H_{34} = H_{44} = -2x_3^3 - bx_2^2 + 2cx_2^2x_3.$$

Gleich Null gesetzt ist dieses eine cubische Gleichung für $\frac{x_3}{x_2} = \lambda$, deren drei Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Ecken auf diesen Graden bestimmen. Mit b und c sind diese Wurzeln durch die Relationen

$$-2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = b, \quad -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) = c, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

verbunden.

Nach der Formel §. 16, 3 der angeführten Abhandlung von Gordan sind jetzt die Gleichungen der 3 durch

$$x_1 = x_2 = x_3 + x_4 = 0$$

gehenden Pentaederebenen:

$$(cx_1 + x_3 + x_4) + 2(\lambda_2 + \lambda_3)x_2 + 2\lambda_2\lambda_3 x_1 = 0$$
$$(cx_1 + x_3 + x_4) + 2(\lambda_3 + \lambda_1)x_2 + 2\lambda_3\lambda_1 x_1 = 0$$
$$(cx_1 + x_2 + x_4) + 2(\lambda_1 + \lambda_2)x_2 + 2\lambda_1\lambda_2 x_1 = 0$$

oder

$$x_1(c + 2\lambda_2\lambda_3) + 2x_2(\lambda_2 + \lambda_3) + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1(c + 2\lambda_3\lambda_1) + 2x_2(\lambda_3 + \lambda_1) + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1(c + 2\lambda_1\lambda_2) + 2x_2(\lambda_1 + \lambda_2) + x_3 + x_4 = 0$$

Weiter sind nach §. 16, 2 die Gleichungen der beiden übrigen Ebenen

$$x_1 + \mu(x_3 - x_4) = 0, \qquad x_1 - \mu(x_3 - x_4) = 0$$

worin zur Abkürzung

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2\{\varrho[(\lambda_2^3-\lambda_3^3)(c+2\lambda_2\lambda_3)^3+(\lambda_3^3-\lambda_1^3)(c+2\lambda_3\lambda_1)^3+(\lambda_1^3-\lambda_2^3)(c+2\lambda_1\lambda_2)^3]-a\}}}$$

und $\frac{1}{4\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_1^3 & 1\\ \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & 1\\ \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & 1\end{vmatrix}} = \varrho$ gesetzt ist.

Die Identität $\Sigma E_i = 0$ ist hergestellt, wenn man die ersten drei Gleichungen noch resp. mit

$$\lambda_2 - \lambda_3, \quad \lambda_3 - \lambda_1, \quad \lambda_1 - \lambda_2$$

jede der beiden letzten mit

$$\lambda_1^2(\lambda_3 - \lambda_2) + \lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_3) + \lambda_3^2(\lambda_2 - \lambda_1)$$

multipliciert.

Bezeichnet man die so erhaltenen Ausdrücke resp. mit

E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, so hat man als gesuchte canonische Form der gegebenen Gleichung:

$$\varrho\left\{\frac{\lambda_2^2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3^2}{(\lambda_2-\lambda_3)^2}E_1^3+\frac{\lambda_3^2+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1^2}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}E_2^3+\frac{\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}{\lambda_1-\lambda_2^2}E_3^3\right\}$$
$$-\frac{E_4^3+E_5^3}{4\mu^2(\lambda_1^2(\lambda_3-\lambda_2)+\lambda_2^2(\lambda_1-\lambda_3)+\lambda_3^2(\lambda_2-\lambda_1))^3}=0.$$

Es bleibt noch übrig, die Lage des Pentaeders in Bezug auf die Fläche zu untersuchen. Die Ecke

$$x_1=x_2=+x_4=0$$

ist dadurch ausgezeichnet, dass die eine Ebene ihrer zerfallenden Polare mit der festen Tangentenebene längs der Knotengraden zusammenfällt und sie selbst auf dieser Graden liegt. Auch die Hesse'sche Fläche wird von jener Ebene berührt und zwar längs der Knotengraden und der Kante $x_1=x_3-x_4=0$. Berücksichtigt man noch, dass der Schnittpunkt dieser beiden Graden dargestellt ist durch $x_1=x_2=x_3-x_4=0$, so hat man das folgende Resultat: *Das Pentaeder hat eine ausgezeichnete Ecke, welche auf der Knotengraden liegt, und harmonisch ist zu den Knotenpunkten der Fläche und dem Punkte, in welchem ihre conjugierte Kante jene Grade trifft. Ihre Polare zerfällt so in zwei Ebenen, dass die eine mit der festen Tangentenebene längs der Knotengraden vereinigt liegt und die Hessesche Fläche längs dieser Graden und der conjugierten Kante berührt.*

§. 3.

Die Fläche dritter Ordnung und sechster Classe mit drei conischen Knotenpunkten.

Nimmt man die Ebene der Knotenpunkte zu $x_1=0$, die festen Tangentenebenen an den Knotengraden zu $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$, so erhält die Gleichung der Fläche die Form

$$x_1^3+3(x_2+x_3+x_4)x_1^2+6a\,x_2x_3x_4=0.$$

Die Hessesche Fläche ist demnach dargestellt durch:

$$H=\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & 0 & ax_4 & ax_3 \\ x_1 & ax_4 & 0 & ax_2 \\ x_1 & ax_3 & ax_2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

und die Polare eines Pols y

$$y_1(x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3+x_4) + y_1(x_1^2 + 2\alpha x_3 x_4)$$
$$+ y_3(x_1^2 + 2\alpha x_2 x_4) + y_4(x_1^2 + 2\alpha x_2 x_3) = 0.$$

Eine Ecke des Pentaeders ist

$$x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Drei weitere liegen auf der ihr conjugierten Graden, der Doppelgraden ihrer Polare:

$$x_1(x_1 + 2(x_2 + x_3 + + x_4)) = 0.$$

Bis auf $H_{11} = 2x_2 x_3 x_4 \alpha^3$ verschwinden für jeden Punkt dieser Linie alle Unterdeterminanten. Mithin sind die Coordinaten der drei Ecken

$$0,\ 0,\ 1 - 1;\ 0,\ -1,\ 0,\ 1;\ 0,\ 1,\ -1,\ 0.$$

Nun hat man nach der, schon einmal benutzten Gordanschen Formel §. 16, 3 die Gleichungen der durch $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ gehenden Pentaederebenen:

$$x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$-x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

und nach §. 16, 2 die der beiden übrigen:

$$x_1\left(1 + \frac{\sqrt{16a + a^2}}{a}\right) + 2(x_2 + x_3 + x_4) = 0$$

$$x_1\left(1 - \frac{\sqrt{16a + a^2}}{a}\right) + 2(x_2 + x_3 + x_4) = 0$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{16a + a^2}}{a} = \lambda$$

so hat man, zur Herstellung der Identität $\Sigma E_i = 0$ jeder der drei ersten Gleichungen noch den Factor 4λ, den beiden letzten noch resp. die Factoren $-(1+\lambda)$ und $(1-\lambda)$ hinzuzufügen. Werden die so erhaltenen Ausdrücke resp. mit E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 bezeichnet, so ist die canonische Form der gegebenen Gleichung:

$$\frac{1}{4\lambda}\left(\frac{E_1^3 + E_2^3 + E_3^3}{4\lambda^2(1-\lambda^2)} - \frac{E_4^3}{(1+\lambda)^4} - \frac{E_5^3}{(1-\lambda)^4}\right) = 0.$$

Aus den gefundenen Gleichungen ergeben sich ähnliche Lagen-

beziehungen zwischen Pentaeder und Fläche, wie im vorigen §, nur dass hier mehr Elemente des Pentaeders ausgezeichnet sind.

Der Schnittpunkt der drei festen Tangentenebenen an den Knotengraden der Fläche ist Pentaederecke und die eine Ebene ihrer zerfallenden Polaren enthält die Knotenpunkte. Die Ecken auf ihrer conjugierten Graden sind die Schnittpunkte dieser mit den Knotengraden. Jede der letztern wird von der Kante getroffen, die der auf ihr liegenden Ecke conjugiert ist. Jeder so erzeugte Schnittpunkt, die entsprechende Pentaederecke und die beiden Knotenpunkte sind harmonisch. Weiter findet man durch Betrachtung der sich auf $E_4 = E_5 = 0$ schneidenden Kanten unter Berücksichtigung des eben ausgesprochenen Satzes: *Die drei Pentaederecken in der Ebene der drei Knotenpunkte sind Mittelpunkte von 3 harmonischen Strahlbüscheln; jeder bestehend aus der Pentaederecke in dieser Ebene, der zugehörigen Knotengraden, der Verbindungslinie mit dem dritten Knotenpunkte und der Graden, in welcher die Pentaederebene durch die conjugierten Graden der beiden übrigen Punkte die Ebene der Knotenpunkte scheidet. Die eine Ebene der Polare jeder dieser drei Ecken ist feste Tangentenebene an einer Knotengraden und enthält die Ecke, während sie die Hessesche Fläche längs jener Knotengraden und der conjugierten Kante berührt.*

§. 4.

Die Fläche dritter Ordnung und vierter Classe mit 4 conischen Knotenpunkten [1]).

Nimmt man die Ebenen von je dreien derselben zu Ebenen des Coordinatentetraeders, so heisst die Gleichung der Fläche:

$$x_1 x_2 x_3 + x\, x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 = 0$$

die der Hesseschen Fläche:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & x_3+x_4 & x_2+x_4 & x_1+x_3 \\ x_3+x_4 & 0 & x_1+x_4 & x_1+x_3 \\ x_2+x_4 & x_1+x_4 & 0 & x_1+x_2 \\ x_2+x_3 & x_1+x_3 & x_1+x_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

1) Vergl. Eckardt: Beitrag zur Theorie der Flächen dritter Ordnung. Mathematische Annalen Bd. 5, Heft 2.

und die der Polare eines Punkts y:

$$y_1(x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_2) + y_2(x_1x_3 + x_3x_4 + x_4x_1)$$
$$+ y_3(x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_1) + y_4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0$$

Pentaederecken sind die Punkte

1, 1, 1, −1; 1, 1, −1, 1; 1, −1, 1, 1; −1, 1, 1, 1;

deren Polaren die Ebenenpaare

$$x_4(x_1 + x_2 + x_3) = 0; \quad x_3(x_4 + x_1 + x_2) = 0;$$
$$x_2(x_3 + x_4 + x_1) = 0; \quad x_1(x_2 + x_3 + x_4) = 0$$

sind. *Eine Ebene eines jeden Paars ist also immer Ebene von drei Knotenpunkten, während die andere durch den vierten geht.* Da die Doppelgraden dieser Polaren in einer Ebene liegen, so ist dieselbe eine des Pentaeders. Ihre Gleichung ist

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

In dieser Ebene liegen sechs Ecken, mithin muss jede durch drei der oben angegebenen Punkte ebenfalls Pentaederebene sein. So erhält man als Gleichungen derselben

$$E_1 = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$E_2 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$E_3 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$E_4 = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Damit $\Sigma E_i = 0$ schreiben wir die Gleichung der fünften

$$E_5 = -2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0.$$

Dann ist die canonische Form der Gleichung der Fläche

$$E_1^3 + E_2^3 + E_3^3 + E_4^3 + \frac{E_5^3}{4} = 0$$

Um Lagenbeziehungen zu ermitteln, bestimmen wir die Gleichungen der festen Tangentenebenen an den Knotengraden:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_4 = 0,$$
$$x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_4 = 0.$$

Die Schnittlinie je zweier dieser Ebenen deren Gleichungen sind:

$$x_i + x_k = 0, \quad x_l + x_m = 0$$

enthält immer 2 der 6 Ecken in $E_5 = 0$. Die 4 übrigen sind Schnittpunkte von je drei dieser Ebenen, deren Gleichungen von der Form:

$$x_i + x_k = 0, \quad x_i + x_l = 0, \quad x_i + x_m = 0.$$

Hieraus erkennt man Folgendes:

Die 10 *Ecken des Pentaeders theilen sich in* 2 *Gruppen zu* 4 *und* 6. *Die der ersten Gruppe sind Schnittpunkte solcher drei festen Tangentenebenen, deren Berührungsgrade in einer Ebene liegen und bestimmen vier Pentaederebenen. Die der zweiten Gruppe liegen in der fünften Ebene und* 2 *nicht auf derselben Kante liegende Punkte sind immer in der Schnittlinie von solchen* 2 *festen Tangentenebenen enthalten, deren Berührungsgrade sich nicht schneiden. Jene Schnittlinien sind also die Diagonalen des, durch die vier Kanten gebildeten, vollständigen Vierseits.*

Jeder Punkt der zweiten Gruppe liegt auf einer Knotengraden und ist zu den betreffenden Knotenpunkten und dem Schnittpunkt jener Graden mit der conjugierten Kante harmonisch. Die harmonischen Strahlenbüschel in den Ebenen von drei Knotenpunkten, wie wir sie bei der vorigen Fläche gefunden haben, treten auch hier auf.

Die Knotenpunkte der Fläche sind bei gegebenem Pentaeder eindeutig bestimmt, sobald eine Ebene zu $E_5 = 0$ gewählt ist, da sich dann jeder darstellt als Schnittpunkt der Verbindungsebenen dreier in einer der übrigen Ebenen liegenden Kanten mit ihren conjugierten Ecken. Mit Hülfe dieser Bemerkung ergiebt sich eine einfache Construction der Knotenpunkte folgendermassen. Die letztgenannten 6 Verbindungsebenen schneiden sich in 15 Graden, von denen 12 zu dreien durch die 4 Knotenpunkte gehen; die übrigen 3 Diagonalen des, durch die 4 Kanten in E_5 gebildeten vollständigen Vierseits sind. In jedem Schnittpunkte laufen demnach 4 der 12 zusammen, deren jede einen Knotenpunkt und eine nicht in E_5 liegende Ecke enthält. Hiernach lassen sich diese Linien leicht ziehen und man erhält dann die Knotenpunkte als Schnitte solcher zwei, die, von verschiedenen Punkten ausgehend, eine und dieselbe Pentaederkante schneiden, und zwar eine der beiden, welche die Diagonale durch gewählte beide Punkte treffen.

§. 5.

Die geometrischen Oerter der Knotenpunkte aller Flächen, welche einem Pentaeder angehören. Beziehungen zwischen gleichen Coefficienten der canonischen Form und der Anzahl der Knotenpunkte.

Im §. 1 ist bewiesen, dass man bei gegebenem Pentaeder einen beliebigen Punkt des Raumes zum Knotenpunkt einer zugehörigen Fläche wählen kann, dann dieselbe aber vollständig bestimmt ist. Beim Auftreten von mehr Knotenpunkten sind diese in den Verbindungsebenen von Pentaederecken und ihren conjugierten Graden enthalten. Es sind hierbei stets einige Elemente des Pentaeders ausgezeichnet, wenn man von einer Fläche ausgeht. Liegt jedoch ein Pentaeder vor so sind alle Elemente desselben gleichberechtigt und man erhält daher sämmtliche Flächen, wenn man nach und nach sämmtliche Elemente zu jenen ausgezeichneten macht. Mit Rücksicht auf die, in den §§. 2, 3, 4 gefundenen Lagenbeziehungen ergeben sich dann folgende allgemeine Sätze:

Einem Pentaeder gehören zweifach unendlich viele Flächen mit zwei conischen Knotenpunkten an. Letztere liegen in den 10 *Ebenen, welche die Pentaederecken mit ihren conjugierten Graden verbinden und zwar gehen die Knotengraden aller Flächen, deren Knotenpunkte in einer bestimmten dieser Ebenen liegen, durch die zugehörige Ecke. Alle Knotenpunkte auf einer solchen Graden bilden eine Involution, deren Doppelpunkte die Ecke und der Schnittpunkt mit der conjugierten Kante sind. Je zwei conjugierte Punkte der Involution sind Knotenpunkte derselben Fläche. Jede der* 10 *genannten Ebenen ist feste Tangentenebene an den Knotengraden aller Flächen, deren Knotenpunkte sie enthält und die zugehörige Ecke hat in Bezug auf diese Flächen dieselbe Polare. Die Gesammtheit aller Flächen theilt sich demnach in* 10 *Schaaren.*

Einem Pentaeder gehören einfach unendlich viele Flächen mit drei conischen Knotenpunkten an. Letztere liegen in 30 *Geraden, von denen je 3 durch eine Pentaederecke gehen. Solche drei Linien stellen sich dar als Schnitte dreier Verbindungsebenen der Kanten, welche sich in jener Ecke treffen*

mit ihren conjugierten Ecken. Letztere liegen auf einer Kante, und eine Ebene, durch diese gelegt, bestimmt die Knotenpunkte einer Fläche als Schnittpunkte mit jenen 3 Geraden. Genannte drei Verbindungsebenen sind feste Tangentenebenen der Flächen, deren Knotenpunkte in ihren Durchschnitten liegen. Alle Flächen theilen sich demnach in 10 *Schaaren, nach den festen Tangentenebenen und den Geraden, welche ihre Knotenpunkte enthalten.*

Einem Pentaeder gehören 5 *Flächen mit* 4 *conischen Knotenpunkten an. Jeder Fläche ist eine Pentaederebeoe zugeordnet. Die Knotenpunkte einer Fläche sind Schnittpunkte der Verbindungsebenen von je drei Ecken der ihr zugeordneten Ebene, welche nicht auf einer Kante liegen, mit ihren conjugierten Graden. Jene Ebenen sind feste Tangentenebenen an den Knotengraden.*

Durch specielle Lage eines Knotenpunkts kann das Auftreten eines weitern bedingt werden und zwar sind dann mehrere Coefficienten der Cuben einander gleich. Die vorigen §§. zeigen, dass bei Flächen mit 2, 3 und 4 Knotenpunkten eben so viele gleiche Coefficienten der Cuben auftreten. Wir wollen zunächst untersuchen, ob diese Beziehung umkehrbar ist. Jedenfalls sind die gegebenen Gleichungen specielle Fälle von der in §. 1 aufgestellten

$$\frac{E_1{}^3}{E_{1y}{}^2}+\frac{E_2{}^3}{E_{2y}{}^2}+\frac{E_3{}^3}{E_{3y}{}^2}+\frac{E_4{}^3}{E_{4y}{}^2}+\frac{E_5{}^3}{E_{5y}{}^2}=0$$

deren Fläche in y einen Knotenpunkt hat. Setzen wir nun zwei Coefficienten einander gleich etwa

$$\frac{1}{E_{4y}{}^2}=\frac{1}{E_{5y}{}^2}$$

oder $$(E_{4y}+E_{5y})(E_{4y}-E_{5y})=0$$

so folgt, dass der Knotenpunkt dann in einer von zwei zu E_4 und E_5 harmonischen Ebenen liegt. Er liege in $E_4+E_5=0$ In dieser Ebene liegt in Folge der Identität $\Sigma E_i = 0$ auch die zu $E_4 = E_5 = 0$ conjugierte Ecke $E_1 = E_2 = E_3 = 0$. Sind die Coordinaten dieser $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ ferner die des Schnittpunkts einer durch sie und y gehenden Graden mit $E_4=E_5=0$ $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$, so ist

$$y_i = a_i + \lambda b_i \ . \quad \ldots \ i = 1, 2, 3, 4$$

Durch Substitution dieser Werthe wird

$$E_{iy} = (u_{1i}a_1 + u_{2i}a_2 + u_{3i}a_3 + u_{4i}a_4) + \lambda(u_{1i}b_1 + u_{2i}b_2 + u_{3i}b_3 + u_{4i}b_4)$$

Für $i = 1, 2, 3$ wird $E_{iy} = \lambda . E_{ib}$

Für $i = 4, 5$ „ $E_{iy} = E_{ia}$.

Da λ bei den drei ersten Grössen nur als Factor, bei den letzten aber gar nicht auftritt, so erleiden die Quadrate derselben und mit ihnen die Coefficienten der Fläche gar keine Veränderung, wenn für λ der negative Werth gesetzt wird. Folglich ist auch der zu a, y und b vierte harmonische Punkt Knotenpunkt der Fläche. Liegt jedoch der Knotenpunkt in der Ebene $E_4 - E_5 = 0$, so kann sich kein zweiter Knotenpunkt finden, da sonst ein Widerspruch mit den in §. 2 gefundenen Resultaten stattfinden würde.

Hat demnach die auf 5 Cuben reducierte Gleichung einer Fläche dritter Ordnung mit einem Knotenpunkt zwei gleiche Coefficienten, so liegt derselbe entweder in der Ebene, welche die, von den Ebenen der gleichen Coefficienten gebildeten Kante mit ihrer conjugierten Ecke verbindet, oder in der vierten harmonischen zu diesen drei Ebenen. Im ersten Falle besitzt die Fläche in der nämlichen Ebene noch einen Knotenpunkt und hat alle Eigenschaften der betrachteten Fläche mit zwei Knotenpunkten.

Bei drei und vier gleichen Coefficienten ergiebt sich Aehnliches, es können dann zwei und drei weitere Knotenpunkte auftreten. Die Gliederung der verschiedenen Fälle, welche in Bezug auf die Lage der Knotenpunkte vorkommen können, hat keine Schwierigkeiten.

Man kann übrigens von der Annahme eines Knotenpunkts in einer der besagten Verbindungsebenen oder in den Schnittlinien und Schnittpunkten derselben ausgehen und auf weitere Knotenpunkte schliessen.

§. 6.

Die Fläche dritter Ordnung und neunter Classe mit einem biplanaren Knotenpunkte.

Hier ist der Berührungskegel im Knotenpunkte in ein Ebenenpaar ausgeartet. Jede dieser Ebenen schneidet die Fläche in drei Linien, die Schnittlinie beider Ebenen liegt jedoch nicht auf der Fläche, sondern berührt dieselbe im Knotenpunkte.

Nimmt man jene beiden Ebenen zu $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, so kann man der Gleichung der Fläche die Form

$$6x_1x_2x_4 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\alpha_1x_1^2x_3 + 3\alpha_2x_2^2x_3 = 0$$

geben. Dann ist

$$H = \begin{vmatrix} x_1+\alpha_1x_3 & x_4 & \alpha_1x_1 & x_2 \\ x_4 & x_2+\alpha_2x_3 & \alpha_2x_2 & x_1 \\ \alpha_1x_1 & \alpha_2x_2 & x_3 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und die Gleichung der Polare

$$y_1(x_1^2 + 2x_2x_4 + 2\alpha_1x_1x_3) + y_2(x_2^2 + 2x_1x_4 + 2\alpha_2x_2x_3) + y_3(\alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + x_3^2) + 2y_4x_1x_2 = 0.$$

Mit den anfänglichen Betrachtungen übereinstimmend verschwinden für den Knotenpunkt alle Unterdeterminanten, d. h. er ist eine Pentaederecke. Da weiter seine Polare ist

$$x_1x_2 = 0,$$

so liegt er auf der ihm conjugierten Kante, woraus schon ersichtlich, dass kein eigentliches Pentaeder mehr existieren kann. Auf dieser Kante finden sich noch die weitern Ecken [1])

$$0,\ 0,\ 1,\ = \sqrt{\alpha_1 . \alpha_2}.$$

Die Polaren dieser beiden Punkte sind die, bei den gewählten Constanten imaginären Ebenenpaare

$$(E_1 + ix_3)(E_1 - ix_3) = 0, \quad (E_2 + ix_3)(E_2 - ix_3) = 0,$$

---

1) Wenn auch kein eigentliches Pentaeder mehr vorhanden ist, so mögen doch noch künftig die von demselben gebliebenen Punkte, Graden und Ebenen mit den früheren Namen belegt werden.

wo

$$E_1 = x_1\sqrt{\alpha_1} + x_2\sqrt{\alpha_2}, \qquad E_2 = x_1\sqrt{\alpha_1} - x_2\sqrt{\alpha_2}.$$

Ihre reellen Schnittlinien sind Pentaederkanten und bestimmen mit $x_1 = x_2 = 0$ die Pentaederebenen

$$x_3 = 0, \quad E_1 = 0, \quad E_2 = 0 \text{ einfach.}$$

Nun ist nach § 16, 3 der Gordan'schen Abhandlung das Produkt der beiden übrigen Ebenen

$$E_1 E_2 = 0,$$

E_1 und E_2 zählen demnach doppelt, $x_3 = 0$ einfach.

Die Eigenschaft von zwei Pentaederebenen, mit den Ebenen der zugehörigen Polare harmonisch zu sein ist, wie man leicht erkennt, erhalten geblieben. Auf den Kanten

$$x_3 = E_1 = 0 \text{ und } x_3 = E_2 = 0$$

finden sich ausser $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ noch die Ecken

$$-2\frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ 2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}},\quad 0,\quad \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}^3 - 1 \text{ und}$$

$$2\frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ 2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}},\quad 0,\quad \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}^3 - 1.$$

Wie oft die gefundenen Punkte und Graden als Elemente des Pentaeders zählen, ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Aus dem Doppeltzählen von E_1 und E_2 folgt, dass ihre Schnittlinie nämlich $x_1 = x_2 = 0$ vierfach zu rechnen ist. Ausserdem giebt es noch 2 Doppelgrade (die Schnittlinien von E_1 und E_2 mit $x_3 = 0$ und zwei einfache. Von den letzten ist die eine aufzufassen als Schnitt der beiden zusammenfallenden Ebenen von E_1, die andere in gleicher Weise als Schnitt der beiden E_2. Eben so oft zählen nun auch die diesen Graden conjugierten Elemente. Wir wollen diese Untersuchung jedoch noch in anderer Weise durchführen. In der angeführten Abhandlung von Clebsch wird eine Methode zur Bildung des Produkts der 10 Pentaederecken angegeben, indem dieselben als zerfallende Fläche 10ter Classe aufgefasst werden. Jenes Produkt stellt sich dann dar als 20reihige Determinante, kann jedoch, wenn die Gleichungen $H_{ik} = 0$ nicht zu verwickelt sind, mit Vortheil auf eine 10reihige zurückgeführt werden,

wie es hier geschehen soll. Bestimmt man nämlich aus den letzten 10 Gleichungen die 20 Grössen $x_i\ x_k\ x_h$ bis auf 10 willkürliche Coefficienten, und führt die gefundenen Werthe in die 10 vier aus

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

durch Multiplication mit den $10\, x_i\ x_k$ gebildeten Gleichungen ein, so liefert das Resultat der Elimination der Coefficienten das Produkt der 10 Knotenpunkte.

Etwas bequemer gelangt man zu diesen Gleichungen durch Bildung der Function

$$\Phi = \Sigma\Sigma\Sigma x_i\ x_k\ x_h\ .\ u_i\ u_k\ u_h$$

oder die Constanten $x_i\ x_k\ x_h$ entsprechender durch a_{ikh} bezeichnet:

$$\Phi = \Sigma\Sigma\Sigma a_{ikh}\ .\ u_i\ u_k\ u_h$$

indem die gleich Null gesetzten Differentialquotienten $\dfrac{d^2\Phi}{du_i\ du_k}$ dieselben liefern.

Für die vorliegende Fläche ist

$$H_{11} = a_{113} = 0 \qquad H_{13} = \alpha_1\, a_{111} - \alpha_2\, a_{122} = 0$$
$$H_{12} = a_{123} = 0 \qquad H_{23} = \alpha_1\, a_{112} - \alpha_2\, a_{222} = 0$$
$$H_{22} = a_{223} = 0$$

$$H_{14} = a_{223} + \alpha_2 a_{233} + \alpha_1\alpha_2 a_{112} - \alpha_2{}^2 a_{222} - a_{134} = 0$$
$$H_{24} = a_{113} + \alpha_1 a_{133} + \alpha_1\alpha_2 a_{122} - \alpha_1{}^2 a_{111} - a_{234} = 0$$
$$H_{33} = 2a_{124} - a_{222} - \alpha_2 a_{223} - a_{111} - \alpha_1 a_{113} = 0$$
$$H_{34} = \alpha_2 a_{224} + \alpha_1 a_{114} - \alpha_1 a_{122} - 2\alpha_1\alpha_2 a_{123} - \alpha_2 a_{112} = 0$$
$$H_{44} = a_{123} + \alpha_1 a_{233} + \alpha_2 a_{133} + \alpha_1\alpha_2 a_{333} + 2\alpha_1\alpha_2 a_{124} - \alpha_1{}^2 a_{112} - \alpha_1{}^2 a_{113} - \alpha_2{}^2 a_{122} - \alpha_2{}^2\alpha_1 a_{223} - a_{334} = 0.$$

Sind weiter die Coefficienten, welche bei der Bestimmung der a_{ikh} auftreten λ_{ik}, so folgt hieraus:

$$a_{113} = 0 \quad a_{122} = \lambda_{11}\alpha_1 \quad a_{233} = \lambda_{13}$$
$$a_{123} = 0 \quad a_{111} = \lambda_{11}\alpha_2 \quad a_{133} = \lambda_{14}$$
$$a_{223} = 0 \quad a_{222} = \lambda_{12}\alpha_1 \quad a_{134} = \alpha_2\lambda_{13}$$
$$a_{112} = \lambda_{12}\alpha_2 \quad a_{234} = \alpha_1\lambda_{14}$$

$$a_{124} = \frac{\lambda_{12}\alpha_1 + \lambda_{11}\alpha_2}{2} a_{333} = \lambda_{22}$$

$a_{224} = \lambda_{12}\alpha_2 + \lambda_{23}\alpha_1 \quad a_{344} = \alpha_1\lambda_{13} + \alpha_2\lambda_{14} + \alpha_1\alpha_2\lambda_{22}$
$a_{114} = \lambda_{11}\alpha_1 - \lambda_{23}\alpha_2 \quad a_{144} = \lambda_{24},\ a_{244} = \lambda_{33},\ a_{344} = \lambda_{34},\ a_{444} = \lambda_{44}.$

Mithin ist:

$$\Phi = \lambda_{11}(3\alpha_1 u_1 u_2^2 + \alpha_2 u_1^3 + 6\frac{\alpha_2}{2} u_1 u_2 u_4 + 3\alpha_1 u_1^2 u_4)$$

$$+ \lambda_{12}(\alpha_1 u_2^3 + 3\alpha_2 u_1^2 u_2 + 6\frac{\alpha_1}{2} u_1 u_2 u_4 + 3\alpha_2 u_2^2 u_4)$$

$$+ \lambda_{13}(3u_1 u_3^2 + 6\alpha_1 u_2 u_3 u_4 + 3\alpha_2 u_3 u_4^2) + \lambda_{14}(3u_2 u_3^2 + 6\alpha_2 u_1 u_3 u_4$$
$$+ 3\alpha_1 u_3 u_4^2)\ \lambda_{22}(u_3^3 + 3\alpha_1\alpha_2 u_3 u_4^2) + \lambda_{23}(3\alpha_1 u_2^2 u_4 - 3\alpha_2 u_1^2 u_4)$$
$$+ \lambda_{24} 3u_1 u_4^2 + \lambda_{33} 3u_2 u_4^2 + \lambda_{34} 3u_3^2 u_4 + \lambda_{44} u_4^3 = 0.$$

Die sich hieraus ergebende Determinante der 2ten Differentialquotienten reduciert sich auf:

$$P = u_4^4(u_3^2 - \alpha_1\alpha_2 u_4^2)^2\{\alpha_1(2\alpha_2 u_1 + \alpha_1 u_4)^2 - \alpha_2(2\alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_4)^2\} = 0.$$

Mithin haben wir einen vierfachen, 2 Doppel- und 2 einfache Punkte, mit dem frühern übereinstimmend. Wir haben demnach das folgende Resultat:

Von den Pentaederebenen sind 3 vorhanden, von denen zwei doppelt, eine einfach zählt. Erstere gehen durch die Schnittlinie der Ebenen des Knotenpunkts und sind zu diesem harmonisch. Die Pentaederecken sind: Der vierfach zählende Knotenpunkt, zwei doppeltzählende in der Schnittlinie der Doppelebenen und noch 2 einfache, jeder in einer der Schnittlinien der Doppelebenen mit der einfachen.

§. 7.

Die Fläche dritter Ordnung und achter Classe mit einem biplanaren Knotenpunkte.

Bei dieser Fläche rücken 2 von den 6 Graden des Knotenpunkts in die Schnittlinie der beiden Tangentialebenen, welche nach Schläfli hier Axe der Fläche heisst.

Nehmen wir die beiden Ebenen zu $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, so nimmt die Gleichung der Fläche die Form

$$6x_1 x_2 x_4 + ax_1^3 + bx_2^3 + 3x_1 x_2^2 + 3x_2 x_3^2 = 0$$

an. Hieraus folgt

$$H = \begin{vmatrix} ax_1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ x_4 & bx_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_3 & x_1+x_2 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und die Polare

$$y_1(2x_1x_1+ax_1^2+x_3^2)+y_2(2x_1x_4+bx_2^2+x_3^2)+y_3(2x_1x_3+2x_2x_3) + 2y_4x_1x_2 = 0.$$

Nach der im vorigen § angegebenen Methode findet man als Produkt der 10 Pentaederecken:

$$P = u_4^6 \cdot u_3^3\left[u_1 - u_2 - \frac{a-b}{2}u_4\right] = 0.$$

Es giebt daher nur drei getrennt liegende Punkte. Ihre Polaren sind resp.:

$x_1 \cdot x_2 = 0$, $x_3(x_1+x_2) = 0$, $(x_1 - x_2)(ax_1 + bx_2 - 2x_4) = 0$.

Ihre Schnittlinien bestimmen die Pentaederebenen

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0$$

und man hat nach der Gordan'schen Formel §. 16, 4 als Produkt der übrigen drei

$$(x_1 + x_2)^2(x_1 - x_2) = 0;$$

$x_1 + x_2 = 0$ zählt demnach dreifach, $x_1 - x_2 = 0$ doppelt, mit den Ebenen des Knotenpunkts bilden beide wiederum einen harmonischen Büschel.

Demnach sind von den Pentaederebenen eine dreifache und eine doppelte vorhanden, welche harmonisch zu den Ebenen des Knotenpunkts sind. Als Ecken treten auf: der 6fach zählende Knotenpunkt, ein dreifacher auf der Axe und ein einfacher in der Doppelebene.

§. 8.

Die Fläche dritter Ordnung und siebenter Classe mit einem biplanaren Knotenpunkte.

Diese Fläche wird von der einen Tangentenebene des Knotenpunkts längs der Axe berührt, sie enthält daher ausser der Axe nur noch eine durch den Knotenpunkt gehende Grade.

Nimmt man diese Ebene zu $x_1 = 0$, die andere zu $x_2 = 0$, so lässt sich die Fläche durch die Gleichung

$$6x_1 x_2 x_4 + 3x_1 x_2^2 + 3x_2^2 x_3 - x_1^3 = 0$$

darstellen. Es ist

$$H = \begin{vmatrix} -x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und die Polare

$$y_1(2x_2x_4 + x_4^2 - x_1^2) + y_2(2x_1x_4 + 2x_2x_3) + y_3(2x_1x_3 + x_2^2) + 2y_4 \cdot x_1 x_2 = 0.$$

Als Produkt der Knotenpunkte ergiebt sich

$$u_4^{10} = 0.$$

Der Knotenpunkt ist daher die einzige Pentaederecke, seine Polare

$$x_1 x_2 = 0.$$

Durch das Zusammenrücken aller 10 Punkte sind nun auch die beiden getrennt gelegenen Pentaederebenen der vorigen Fläche vereinigt und wir haben eine *fünffache Pentaederebene.*

§. 9.

Die Fläche dritter Ordnung und sechster Classe mit einem biplanaren Knotenpunkte.

Diese Fläche wird von der einen Ebene des Knotenpunkts $x_1 = 0$ längs der Axe osculiert, von der andern ausser in der Axe noch in zwei Geraden geschnitten Es ist ihre Gleichung:

$$6x_1x_2x_4 + 3x_1x_3^2 + x_1^3 + x_2^3 = 0;$$

$$H = \begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ x_4 & x_2 & 0 & x_1 \\ x_3 & 0 & x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_1(x_1^3 + x_2^2 - x_1x_3 - 2x_1x_2x_4) = 0.$$

Letztere besteht daher aus der Osculationsebene und einer Fläche dritter Ordnung, welche sich in der Nähe des Knotenpunkts genau so wie die gegebene Fläche verhält. $x_1 = 0$ ist ebenfalls Osculationsebene, während $x_2 = 0$ in den Geraden

$$x_1 = 0, \quad x_1 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_3 = 0$$

schneidet. Man kann hier nicht mehr wie bei den vorigen

Flächen das Produkt der 10 Ecken bilden, da dasselbe identisch Null wird. In der That sind dieselben auch nicht mehr völlig bestimmt, da schon für jeden Punkt der Axe $x_1 = x_2 = 0$ sämmtliche Unterdeterminanten verschwinden. Die allgemeine Polare

$$y_1(2x_2x_4 - x_1^2) + y_2(2x_1x_4 + x_2^2) + y_3 2x_1x_3 + y_4 2x_1x_2 = 0$$

zerfällt für einen solchen Punkt 0, 0, λ, 1 in das Ebenenpaar

$$x_1(\lambda x_3 + x_2) = 0.$$

Die eine Ebene ist also stets Osculationsebene, während die andere sich um $x_2 = x_3 = 0$, d. h. um die vierte harmonische Gerade zu den dreien, in welchen die zur Hesse'schen Fläche gehörenden Fläche dritter Ordnung von $x_2 = 0$ geschnitten wird, dreht. Der Punktreihe der Ecken auf der Axe entspricht also ein ihm projectirischer Strahlbüschel der conjugierten Kanten in der Osculationsebene, dessen Centrum der Knotenpunkt.

Die Gleichung einer Pentaederebene erhält man durch Annahme zweier Punkte

$$0,\ 0,\ \lambda,\ 1 \text{ und } 0,\ 0,\ \lambda_2,\ 1$$

auf der Axe nach Gordan §. 16, 3 in der Form

$$f_{44} + \lambda_1 \lambda_2 f_{33} + (\lambda_1 + \lambda_2) f_{34} = 0$$

d. h. $$x_1 = 0.$$

Mithin ist die Osculationsebene die einzige Pentaederebene.

§. 10.

Die Fläche dritter Ordnung und sechster Classe mit einem uniplanaren Knotenpunkte.

Bei dieser Fläche sind die Ebenen des Knotenpunkts zu einer Doppelebene geworden, welche die Fläche in drei, durch den Knotenpunkt gehende Graden schneidet.

Die Doppelebene sei $x_1 = 0$ des Coordinatentetraeders, die Tangentenebenen an den drei Graden seien $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_2 + x_3 = 0$. Ausserdem existieren auf der Fläche noch 3 in einer Ebene ($x_4 = 0$) liegende Grade, von denen jede eine der erstgenannten trifft. Bei dieser Wahl der Funda-

mentalebenen nimmt die Gleichung der Fläche die folgende Form an:

$$3x_4x_1^2 + 6x_1x_2x_3 - 3x_2^2x_3 - 3x_2x_3^2 = 0.$$

Die Gleichungen der Graden in $x_1 = 0$ sind:

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0$$

der in $x_4 = 0$:

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad 2x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Als Gleichung der Hesseschen Fläche findet man

$$H = \begin{vmatrix} x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_3 & -x_3 & x_1-x_2-x_3 & 0 \\ x_2 & x_1-x_2-x_2 & -x_2 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_1^2(x_2^2-(x_1-x_2-x_3)^2) = 0$$

Diese Fläche zerfällt also in die, hier ebenfalls doppelt zählende, Ebene des Knotenpunkts und in einen Kegel, dessen Spitze dieser Punkt ist. Die Tangentenebenen an den Geraden durch letztern berühren den Kegel.

Es verschwinden mit Ausnahme von H_{44} für $x_1 = 0$ alle Unterdeterminanten, mithin *giebt es eine ganze Curve dritter Ordnung* ($x_1 = 0$, $H_{44} = 0$), *deren Punkte die Eigenschaften der frühern Pentaederecken besitzen*. In $x_1 = 0$ ist die Gleichung dieser Curve

$$K = x_4(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2) + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 = 0.$$

Der Knotenpunkt ist Doppelpunkt der Curve, letztere besitzt demnach 3 Wendepunkte auf einer Graden. Diese Grade ist $x_4 = 0$, die Wendepunkte selbst sind die Schnittpunkte der beiden Arten von Graden auf der Fläche. Bei den gewählten Constanten sind die Wendepunkte reell, die Tangenten der Doppelpunkte daher imaginär; welches sich auch aus der Gleichung der Curve ergiebt da ihr Produkt

$$x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 = 0$$

ist. Dieses ist auch die Gleichung des Schnitts des zu H gehörigen Kegels mit $x_1 = 0$.

Wir bilden nun die Polare der gegebenen Fläche für einen Pol y:

$$y_1(2x_1x_4 + 2x_2x_3) + y_2(2x_1x_3 - 2x_2x_3 - x_3^2) + y_3(2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3) + y_4x_1^2 = 0.$$

Diese Fläche muss für einen Punkt von K in ein Ebenenpaar zerfallen. Die Coordinaten eines solchen Punkts sind darstellbar als homogene Functionen eines Parameters $\frac{\mu}{\lambda}$ nämlich:

$x_2 = \lambda(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2)$, $x_3 = \mu(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2$, $x_4 = -\lambda\mu(\mu+\lambda)$.

Für diese Werthe der y geht die Polare über in:

$$\left[x_1 - x_2\frac{\omega(\omega-\mu)}{\lambda(\lambda+\mu}} - x_3\frac{\omega(\omega+\lambda)}{\mu(\lambda+\mu)}\right]$$

$$\left[x_1 - x_2\frac{\omega(\omega+\mu)}{\lambda(\lambda+\mu)} - x_3\frac{\omega(\omega+\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\right] = 0$$

worin zur Abkürzung

$$+\sqrt{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2} = \omega$$

gesetzt ist. Die Doppelgraden aller Polaren entsprechen den Pentaederkanten. Ihren geometrischen Ort erhält man durch Elimination von λ und μ aus den beiden Gleichungen, welche entstehen, wenn man jeden Factor gleich Null setzt. Es findet sich als Ort der zu H gehörige Kegel, mithin sind die Doppelgraden Erzeugende desselben.

Um zu untersuchen, was aus den frühern Pentaederebenen geworden ist, nehmen wir drei in gerader Linie liegende Punkte auf H an, deren Parameter $\frac{\mu_1}{\lambda_1}$, $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$, $\frac{\mu_3}{\lambda_3}$ sein mögen. Letztere müssen dann der Bedingung

$$0 = (\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda)(\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3)(\lambda_3\mu_1 - \mu_3\lambda_1)(\lambda_1\lambda_2\mu_3 + \lambda_1\mu_2\lambda_3 + \mu_1\lambda_2\lambda_3 + \mu_1\mu_2\lambda_3 + \mu_1\lambda_2\mu_3 + \lambda_1\mu_2\mu_3) = 0$$

genügen. Diese Bedingungsgleichung ist für 2 gleiche Parameter erfüllt; man erhält jedoch nur dann 2 consecutive Punkte von K, wenn ausserdem der letzte Factor verschwindet Die drei ersten Factoren sind daher werthlos und die nothwendige und hinreichende Bedingung ist:

$$\lambda_1\lambda_2\mu_3 + \lambda_1\mu_2\lambda_3 + \mu_1\lambda_2\lambda_3 + \mu_1\mu_2\lambda_3 + \mu_1\lambda_2\mu_3 + \lambda_1\mu_2\mu_3 = 0.$$

Solche drei Punkte entsprechen dreien Pentaederecken auf einer Kante. Zur Bestimmung der zugehörigen Ebenen haben wir die Gordan'sche Formel §. 16, 3. Nach derselben sind die gesuchten Gleichungen

$$E_{ik} = x_1(\lambda_i\mu_k + \mu_i\lambda_k) - x_2(\mu_i\mu_k + \mu_i\lambda_k + \lambda_i\mu_k)$$
$$- x_3(\lambda_i\mu_k + \mu_i\lambda_k + \lambda_i\mu_k) = 0 \ldots i, k = 1, 2, 3.$$

Jede Ebene E_{ik} geht wie bei den früher betrachteten Flächen durch die Doppelgraden der zu $\frac{\mu_i}{\lambda_i}$ und $\frac{\mu_k}{\lambda_k}$ gehörigen Polaren und durch den dritten Punkt.

Da die erste Eigenschaft auch für drei beliebige Punkte der Curve bestehen bleibt, so kann man jede Polare in der Form

$$(A \,.\, E_{ik} + BE_{il})(C \,.\, E_{ik} + DE_{il}) = 0$$

schreiben, unter A, B, C, D Constanten verstanden, und zwar ist

$$\frac{A}{B} = \frac{\lambda_k\lambda_l\,\omega - \lambda_i(\lambda_i\lambda_k + \mu_i\lambda_k + \lambda_i\mu_k)}{\lambda_k\lambda_l\,\omega - \lambda_k(\lambda_i\lambda_l + \mu_i\lambda_l + \lambda_i\mu_l)}$$

$$\frac{C}{D} = \frac{\lambda_k\lambda_l\,\omega + \lambda_l(\lambda_i\lambda_k + \mu_i\lambda_k + \lambda_i\mu_k)}{\lambda_k\lambda_l\,\omega - \lambda_k(\lambda_i\lambda_l + \mu_i\lambda_l + \lambda_i\mu_l)}$$

Das Doppelverhältniss dieser 4 Ebenen ist

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{\lambda_k\lambda\;\omega^2 + \omega_i\lambda_i(\mu_i\lambda_l - \mu_i\lambda_k) + \lambda_i\lambda_k + \mu_i\lambda_l + \lambda_i\mu_k)}{\lambda_k\lambda_l\omega^2 + \omega_i\lambda_i(\mu_i\lambda_k - \mu_i\lambda_l) + (\lambda_i\lambda_k + \mu_i\lambda_k + \lambda_i\mu_k)}$$
$$\frac{\lambda_i\lambda_l + \mu_i\lambda_l + \lambda_i\mu_l}{\lambda_i\lambda_l + \mu_i\lambda_l + \lambda_i\mu_l}$$

Die Ebenen sind harmonisch, wenn dasselbe -1 ist, oder wenn:

$$0 = -\omega^2 \,.\, \lambda_i\lambda_l + (\lambda_i\lambda_k + \mu_i\lambda_k + \lambda_i\mu_k)(\lambda_i\lambda_l + \mu_i\lambda_l + \lambda_i\mu_l)$$
$$= \lambda_1\lambda_2\mu_3 + \lambda_1\mu_2\lambda_3 + \mu_1\lambda_2\lambda_3 + \mu_1\mu_2\lambda_3 + \mu_1\lambda_2\mu_3 + \lambda_1\mu_2\mu_3.$$

Dieses ist aber die Bedingung, dass die drei Punkte in gerader Linie liegen, *für diese sind also die Pentaederebenen harmonisch zu den Ebenen der entsprechenden Polaren. Es zerfallen hiernach die Pentaedergraden in 2 Classen, von denen die der ersten Classe alle durch einen Punkt (den Knotenpunkt) gehen, die der zweiten alle in einer Ebene (der Ebene des Knotenpunkts) liegen.* Die letztern sind sämmtlich als Doppelgraden der Polare des Knotenpunkts aufzufassen, da die Gleichung dieser Fläche $x_1^2 = 0$. Besonders ausgezeichnet von den Graden in $x_1 = 0$ sind die Wendetangenten,

da diese die Curve H in drei consecutiven Punkten schneidet. Die Parameter der letztern sind:

$$\mu = 0; \quad \lambda = 0; \quad \mu = 1, \quad \lambda = -1,$$

und die Ebenen haben die Gleichungen:

$$x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad 2x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Man erhält also die Tangentenebenen längs der Graden des Knotenpunkts. Jede der Ebenen ist, bei dieser Auffassung, dreifach zu zählen.

Sämmtliche Ebenen der zerfallenden Polare umhüllen einen und denselben Kegel, dessen Spitze der Knotenpunkt ist. Denken wir uns die ebene Leitlinie dieses Kegels in $x_4 = 0$ liegend, so erhalten wir die Gleichung derselben in Liniencoordinaten durch Elimination von λ und μ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= \lambda\mu(\lambda + \mu) \\ \varrho u_2 &= -\mu\omega(\omega - \mu) \\ \varrho u_3 &= -\lambda\omega(\omega + \lambda) \end{aligned}$$

nämlich

$$U = \mu.(u_2^2 - u_2u_3 + u_3^2) + u_2^2u_3 + u_2u_3^2 = 0.$$

Es ist hier der erste Factor in der Gleichung der Polaren benutzt, der 2te liefert dasselbe Resultat.

Die gefundene Gleichung enthält eine Curve dritter Classe und vierter Ordnung mit einer Doppeltangente ($x_1 = 0$) und folglich drei durch einen Punkt gehenden Rückkehrtangenten. Aus der Gleichung der Berührungspunkte der Doppeltangente

$$u_2^2 - u_2\,u_3 + u_3^2 = 0$$

ergiebt sich, dass jene die Schnittpunkte der Tangenten im Doppelpunkte der Curve K mit $x_4 = 0$ sind. Folglich: *Der von den Ebenen zerfallender Polaren umhüllte Kegel berührt die Ebene des uniplanaren Knotenpunkts längs den Tangenten des Doppelpunkts der Curve K.*

Die drei Rückkehrtangenten von U sind

$$x_2 - x_3 = 0, \quad -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \quad -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

Die Gleichungen der zugehörigen Rückkehrtangentenebenen des Kegels sind gleichlautend mit diesen, und man findet leicht, dass jene Ebenen die Polaren der Wendepunkt in Bezug

auf den zu H gehörigen Kegel zweiter Ordnung sind. *Die Schnittlinie jeder solchen Ebene mit letzteren (also die Berührungsgraden der von den Wendepunkten an ihn gelegten Tangentenebenen) sind harmonisch zu gemeinschaftlichen Schnittlinie aller drei und dem Durchschnitt der betreffenden mit der Ebene des Knotenpunkts.* Ferner wird durch jede der letzten drei Linien eine durch den Knotenpunkt gehende Grade der Fläche von den beiden übrigen harmonisch getrennt. Beide auftretende Kegel berühren sich längs dreien Graden, den Doppelgraden der drei Polaren, welche den Wendepunkten von K zugeordnet sind. Von den Ebenen dieser Polaren selbst, ist immer die eine gemeinschaftliche Tangentenebene beider Kegel, die andere eine Rückkehrtangentenebene von U. Jede Ebene durch zwei Rückkehrkanten dieses Kegels gelegt, enthält eine, durch den Knotenpunkt gehende Grade der Fläche, und zwar ist letztere durch die Schnittlinie der dritten Rückkehrtangentenebene mit jener von den beiden Kanten harmonisch getrennt.

§. 11.

Die Fläche dritter Ordnung und fünfter Classe mit einem uniplanaren Knotenpunkte.

Diese Fläche entsteht aus der vorigen, wenn zwei Grade des Knotenpunkts zusammenfallen, die Fläche also längs dieser Graden von der Ebene des Knotenpunkts berührt wird. Nimmt man diese Ebene zu $x_1 = 0$, weiter die Tangentenebene von der übrigbleibenden Graden zu $x_3 = 0$, so wird die Gleichung der Fläche:

$$x_4 x_1^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 = 0.$$

Ausser den genannten Graden giebt es auf der Fläche noch eine ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$), welche die einfach zählende durch den Knotenpunkt schneidet. Die Hessesche Fläche

$$H = \begin{vmatrix} x_4 & 0 & x_3 & x_1 \\ 0 & x_3 & x_2 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_1^2 (x_1 x_3 - x_2^3) = 0$$

zerfällt wiederum in die Doppelebene des Knotenpunkts und einem Kegel zweiten Grades, welcher jedoch jetzt jene längs $x_1 = x_2 = 0$ berührt. Wie bei der letzten Fläche verschwinden für jeden Punkt der Curve $x_1 = 0$, $H_{44} = 0$ sämmtliche Unterdeterminanten. In $x_1 = 0$ lautet ihre Gleichung

$$K = x_2^2 x_4 + x_3^3 = 0.$$

Der Knotenpunkt ist also ein Rückkehrpunkt der Curve, die Berührungsgrade der Fläche mit $x_1 = 0$ Rückkehrtangente. Der einzige Wendepunkt der Curve ist $x_3 = x_4 = 0$. Die allgemeine Polare

$$y_1(2x_1x_4 + x_3^2) + 2y_2x_2x_3 + y_3(2x_1x_3 + x_2^2) + y_4x_1^2 = 0$$

geht für einen belieben Punkt der Curve mit den Coordinaten

$$0, \quad \lambda^3, \quad \lambda^2\mu, \quad -\mu^3$$

über in

$$2\lambda^3x_2x_3 + \lambda^2\mu(2x_1x_3 + x_2^2) - \mu^3x_1^2 = 0$$

oder

$$(\mu x_1 + \lambda x_2)(-\mu^2x_1 + \lambda\mu x_2 + 2\lambda\varphi^2x_1) = 0.$$

Die Doppelgraden dieser in 2 Ebenen zerfallenden Polaren sind auch hier Erzeugende des Kegels von H. Eine jener Ebenen dreht sich bei Veränderung des Parameters $\frac{\mu}{\lambda}$ um die schon mehrfach definierte Berührungsgrade der Ebene des Knotenpunkts, während die andere den Kegel

$$x_2^2 + 8x_1x_3 = 0$$

umhüllt, welcher ebenfalls längs jener Graden von $x_1 = 0$ berührt wird. Ausserdem berühren sich beide Kegel noch längs einer zweiten Graden ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$), der Doppelgraden der zum Wendepunkt gehörigen Polaren. Die Ebene, durch jene Graden gelegt ($x_2 = 0$), ist gemeinschaftliche Polare des Wendepunkts in Bezug auf beide Kegel.

Zur Bestimmung der Pentaederebenen seien $\frac{\mu_1}{x_1}$, $\frac{\mu_2}{x_2}$, $\frac{\mu_3}{x_3}$ die Parameter dreier in gerader Linie liegender Punkte von K. Dann ist

$$\mu_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\mu_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\mu_3 = 0.$$

Die gesuchten Ebenen sind

$$E_{ik} = \mu_i\mu_k x_1 + (\lambda_i\mu_k + \mu_i\lambda_k)x_2 + \lambda_i\lambda_k x_3 = 0.\ i,\ k = 1, 2, 3.$$

Jede Polare kann auch hier in der Form

$$(AE_{ik} + BE_{il})(CE_{ik} + DE_{il}) = 0$$

geschrieben werden, worin

$$\frac{A}{B} = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2},\quad \frac{C}{D} = -\frac{\mu_1\lambda_3 + 2\lambda_1\mu_3}{\mu_1\lambda_2 + 2\lambda_1\mu_2}.$$

Das Doppelverhältniss

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{\lambda_3(\mu_1\lambda_2 + 2\lambda_1\mu_2)}{\lambda_2(\mu_1\lambda_3 + 2\lambda_1\mu_3)}$$

wird harmonisch, wenn die Punkte in gerader Linie liegen. Die Punkte werden consecutiv, wenn die Grade zur Wende- oder Rückkehrtangente wird. Im ersten Falle erhält man als Pentaederebene die Tangentenebene von $x_1 = x_3 = 0$, im zweiten die Ebene des Knotenpunkts, welche ja aber auch Tangentenebene der Fläche ist.

§. 12.

Die Fläche dritter Ordnung und vierter Classe mit einem uniplanaren Knotenpunkte.

Die Ebene des Knotenpunkts ($x_1 = 0$) ist hier Wendeberührungsebene. Die Gleichung der Fläche ist

$$3x_1^2x_4 + x_2^3 + 3x_1x_3^2 = 0$$

$$H = \begin{vmatrix} x_4 & 0 & x_3 & x_1 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_1^3x_2$$

Die Hessesche Fläche besteht also aus der dreifachen Ebene des Knotenpunkts und nur einer einfachen durch die Berührungsgrade. Die Curve der Pentaederecken $x_1 = 0$, $H_{44} = 0$ oder

$$K = x_2x_3^9 = 0$$

zerfällt in zwei Grade, von denen die eine doppelt zu rechnen ist. Beide schneiden sich im Knotenpunkt und zwar ist die einfache die Berührungsgrade.

Die Polare

$$y_1(2x_1x_4 + x_3^2) + y_2x_2^2 + 2y_3x_1x_3 + y_4x_1^2 = 0$$

zerfällt für die Pole

$$0,\ 0,\ y_3,\ y_4;\quad 0,\ y_2,\quad 0,\ y_4$$

in die Ebenenpaare

$$x_1(2y_3x_3+y_4x_1)=0,\quad (x_1\sqrt{y_2}+x_2\ \sqrt{-y_4})(x_1\sqrt{y_2}+x_2\sqrt{-y_4})=0.$$

Für jeden Punkt der einfach zählenden Graden bleibt eine Ebene der Polaren also stets Ebene des Knotenpunkts, während sich die 2te um die zweifache dreht. Im zweiten Falle erhält man zwei Ebenen durch die einfache Grade.

Als drei Punkte von H auf einer Graden, wie wir sie zur Auffindung der Pentaederebenen benutzt haben, erhalten wir

1) drei beliebige Punkte auf $x_1 = x_2 = 0$.
2) drei beliebige Punkte auf $x_1 = x_3 = 0$.
3) einen Punkt auf $x_1 = x_2 = 0$ und einen Punkt auf $x_1 = x_3 = 0$, da letzterer doppelt zählt.

Als entsprechende Ebenen

1) $x_1 = 0$; 2) $x_2 = 0$;
3) $x_1 = 0$ und zwei zusammenfallende aber unbestimmte Ebenen.

In den beiden ersten Fällen ist jede Ebene dreifach zu rechnen.